Οι Φυσικοί Αριθμοί

Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί είναι ποσοτικές έννοιες και για να τους γράψουμε χρησιμοποιούμε τα αριθμητικά σύμβολα.
Οι αριθμοί μετρούν συγκεκριμένα πράγματα και φανερώνουν το πλήθος της μέτρησης.
Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
Το σύνολο των **φυσικών αριθμών** συμβολίζεται με το γράμμα **N**. Οι φυσικοί αριθμοί είναι **άπειροι**, δηλαδή δεν τελειώνουν ποτέ.
Περιττοί αριθμοί (μονοί) είναι οι: 1, 3, 5, 7, 9, 11,....
Άρτιοι αριθμοί (ζυγοί) είναι οι: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,....

Στρογγυλοποίηση των Αριθμών

Μέθοδος:
1. Προσδιορίζουμε τη **τάξη** στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
2. Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως **μικρότερης (δεξιάς) τάξης**.
3. Αν το ψηφίο αυτό είναι 0, 1, 2, 3, 4 τότε **αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι μέχρι** και την τάξη που γίνεται η στρογγυλοποίηση και **μηδενίζουμε** όλα τα επόμενα ψηφία του.
4. Αν το ψηφίο αυτό είναι 5, 6, 7, 8, 9 τότε **αυξάνουμε κατά μία μονάδα** το ψηφίο της τάξης που γίνεται η στρογγυλοποίηση και **μηδενίζουμε** όλα τα επόμενα ψηφία του.
Παρατήρηση: Δεν στρογγυλοποιούνται αριθμοί τηλεφώνων, Α.Φ.Μ., κωδικοί αριθμοί κλπ.

Πρόσθεση Φυσικών αριθμών

Πρόσθεση δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών είναι το να βρούμε έναν άλλο αριθμό, που να αποτελείται από όλες τις μονάδες των δοσμένων αριθμών και μόνο απ' αυτές.

- **Προσθετέοι** λέγονται οι αριθμοί που πρέπει να προστεθούν
- ο αριθμός που προκύπτει λέγεται **άθροισμα**.

Παρατήρηση:
Σε μία πρόσθεση, π.χ. 12 +8 =20, τόσο το **20** όσο και 12+8 = 8+12 λέγεται **άθροισμα**.

Αφαίρεση φυσικών αριθμών

Η αφαίρεση είναι μία πράξη στην οποία δίνονται δύο αριθμοί, **ο Μειωτέος - Μ** και ο **Αφαιρετέος - Α** και βρίσκουμε έναν άλλο αριθμό, τη **διαφορά - Δ** ώστε να ισχύει:

Μ - Α = Δ γιατί **Α + Δ = Μ**

Παρατήρηση:

Για να γίνει η αφαίρεση φυσικών αριθμών, πρέπει ο **Μ**ειωτέος να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον **Α**φαιρετέο.

Πολλαπλασιασμός Φυσικών αριθμών

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη, στην οποία δίνονται δύο αριθμοί και επαναλαμβάνουμε προσθετικά τον ένα από αυτούς **τόσες φορές, όσες λέει ο άλλος**.

Π.χ. 3·5 = 5+5+5 = 15 αλλά και 3·5 = 3+3+3+3+3 = 15. Ο αριθμός 15 λέγεται **γινόμενο** και οι αριθμοί 5, 3 λέγονται **παράγοντες** του γινομένου.

Παρατηρήσεις:

1. Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό με 10, 100, 1000 κτλ., **γράφουμε δεξιά του** τα 1, 2, 3 κτλ. αντίστοιχα μηδενικά. Π.χ. 23·100 = 2300 ή 7·1000 = 7000

2. Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με το **μηδέν** είναι ίσο με **μηδέν**.

3. Στον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών ισχύουν οι: **Αντιμεταθετική** *(α·β = β·α)*, **Προσεταιριστική** *[(α·β) ·γ = α·(β·γ)]*, **Επιμεριστική** *[α·(β±γ)=α·β±α·γ]*, ιδιότητες

Πολλαπλάσια Φυσικού Αριθμού

Όταν πολλαπλασιάσουμε το φυσικό αριθμό π.χ. τον **3** με όλους τους φυσικούς αριθμούς, προκύπτει μία ομάδα (σύνολο) αριθμών που είναι τα γινόμενα: **0**·3=0, **1**·3=3, **2**·3=6, **3**·3=9, …… κλπ.

Οι φυσικοί αριθμοί 0, 3, 6, 9,… λέγονται **πολλαπλάσια** του 3 και το σύνολο των πολλαπλασίων του 3 συμβολίζεται με $\mathbf{Π_3}$ = {0, 3, 6, 9, ...}.

Γενικά το σύνολο $\mathbf{Π_α}$ = {0, α, 2α, 3α, 4α,...} είναι όλα τα πολλαπλάσια του αριθμού α.

Ελάχιστο Κοινό πολλαπλάσιο

Να βρεθούν τα πολλαπλάσια του 6: $\mathbf{Π_6}$= {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ……} του 5: $\mathbf{Π_5}$ = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...} στα δύο παραπάνω σύνολα $Π_6$ και $Π_5$ να βρεθούν οι κοινοί αριθμοί: **ΚΠ** = {0, 30, 60, ...} που είναι τα κοινά πολλαπλάσια με ποιο μικρό και **όχι μηδέν** το 30, που λέγεται **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο**, και συμβολίζεται: **ΕΚΠ (5, 6) = 30**

Δυνάμεις Αριθμών

Αν **α** ένας φυσικός αριθμός και **ν** ένας φυσικός μεγαλύτερος του **1**, ορίζεται ότι:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu\ -\ \text{παράγοντες}}$$

Το σύμβολο $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ λέγεται **δύναμη** με **βάση α και εκθέτη ν** ή νιοστή δύναμη του α και σύντομα λέμε άλφα στη νιοστή. Π.χ η δύναμη 5^7 διαβάζεται πέντε στην εβδόμη.
Τη δύναμη $\boldsymbol{\alpha^2}$ λέμε και τετράγωνο του α, ενώ η $\boldsymbol{\alpha^3}$ λέγεται και κύβος του α.

Παρατηρήσεις:

1. Η δύναμη $\boldsymbol{10^{\nu}}$ ισούται με τον αριθμό που προκύπτει, όταν δεξιά του **1** βάλουμε **ν** μηδενικά. Π.χ.: 10^2=100, 10^3=1000, 10^4=10.000, 10^5=100.000.
2. Το $\boldsymbol{\alpha^1}$, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α**.
3. Όλες οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή $\boldsymbol{1^{\nu}}$, είναι ίσες με **1**. Π.χ. 1^8=1.
4. Όλες οι **δυνάμεις του 0**, δηλαδή $\boldsymbol{0^{\nu}}$, είναι ίσες με **0**. Π.χ. 0^{2015}=0.

Η Ευκλείδεια Διαίρεση

Όταν δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί, ο **Δ - διαιρετέος** και ο **δ - διαιρέτης**, τότε βρίσκονται δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί, **π - πηλίκο** και **υ - υπόλοιπο**, ώστε να ισχύει:

$$\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \ \text{ με } \ \upsilon < \delta}$$

Η διαδικασία αυτή λέγεται **Ευκλείδεια διαίρεση**.

Παρατηρήσεις:

1. Αν **υ ≠ 0**, τότε η διαίρεση είναι **ατελής**.
2. Αν **υ = 0**, τότε **Δ = δ · π** ενώ η διαίρεση είναι **τέλεια**. Και απλά λέμε ο **δ διαιρεί τον Δ**.
3. Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή: αν **Δ = δ · π** τότε **Δ : δ = π** ή **Δ : π = δ**.

- Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι το **0** (μηδέν). (δ ≠ 0).
- Όταν **Δ = δ**, τότε το πηλίκο **π = 1**. (α : α = 1)
- Όταν ο διαιρέτης **δ = 1**, τότε το πηλίκο **π = Δ**. (α : 1 = α)
- Όταν ο διαιρετέος **Δ = 0**, τότε το πηλίκο **π = 0**. (0 : α = 0)

Διαιρέτες & Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
- Κάθε αριθμός **α** έχει διαιρέτες τους αριθμούς **1** και **α**, μπορεί και άλλους.

Να βρεθούν οι διαιρέτες του 16: $\mathbf{\Delta_{16}}$ ={1,2, 4, 8,16} του 24: $\mathbf{\Delta_{24}}$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} στα δύο παραπάνω σύνολα Δ_{16} και Δ_{24} να βρεθούν οι κοινοί αριθμοί: **ΚΔ** = {1,2, 4, 8} που είναι οι κοινοί διαιρέτες με ποιο μεγάλο αριθμό το **8**, που λέγεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης**, και συμβολίζεται: **ΜΚΔ (16, 24) = 8**

Παρατηρήσεις:

1. Ένας αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
2. Δύο αριθμοί **α** και **β** που έχουν **ΜΚΔ(α, β)=1** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους**.
3. κάθε περιττός ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του **5** μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τριών πρώτων. π.χ. $15=11+2+2$
4. Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του **2** μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων. π.χ. $18=11+7$
5. (*Γενικά*) Κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του **5** μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών πρώτων. π.χ. $38=29+7+2$

Χαρακτήρες διαιρετότητας

Ιδιότητες διαιρετών φυσικού αριθμού

1. Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσια του. Π.χ. Ο αριθμός 7 διαιρεί όλα τα πολλαπλάσια του, δηλαδή 0, 7, 14, 21, 28, ……
2. Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιο του. Π.χ. Ο 27 διαιρείται από το 9, άρα ο 27 είναι πολλαπλάσιο του 9.
3. Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε διαιρεί και τα πολλαπλάσια του. Π.χ. Ο 5 διαιρεί το 15, άρα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του, δηλαδή τα: 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, ……
4. Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους, τότε διαιρεί το άθροισμα τους και τη διαφορά τους. Π.χ. Ο 6 διαιρεί το 18 και το 36, άρα διαιρεί και τα: 18 + 36 = 54 και 36 – 18 = 18.

Σημειώσεις:

1) Η διαφορά δύο αριθμών, αποτελούμενων από τα ίδια ψηφία είναι πάντα πολλαπλάσια του 9. (αρκεί το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο να διαφέρουν).
   π.χ. $734-437=297=\text{πολ.}9$

2) Ένας οποιοσδήποτε αριθμός είναι ίσος μ’ ένα πολλαπλάσιο του 9 αυξημένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού. π.χ.
   $537=59\cdot 9+6=\text{πολ.}9+\text{Άθροισμα}\left(5+3+7=15,\ 1+5=6\right)$

3) Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα τετραγώνων. π.χ.
$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

Κριτήρια Διαιρετότητας

Κριτήρια Διαιρετότητας λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με κάποιους άλλους αριθμούς π.χ. με 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 25, 100, κ.α.

- **Διαιρετότητα με 2**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0, 2, 4, 6, 8 δηλαδή ζυγό. Παράδειγμα: 108 = **2**·54

- **Διαιρετότητα με 3**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3. Παράδειγμα: 7101=**3**·2367

- **Διαιρετότητα με 4**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4**, αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 4 ή 00. Παράδειγμα: 33044 = **4**·8261 ή 70100 = **4**·17525

- **Διαιρετότητα με 5**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.

- **Διαιρετότητα με 6**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **6**, αν διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 3.

- **Διαιρετότητα με 7**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **7**, αν διαγράψουμε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού που θέλουμε να ελέγξουμε και αφαιρέσουμε το διπλάσιο του ψηφίου από το λειψό αριθμό, και αν το αποτέλεσμα διαιρείται από το 7, τότε ο αρχικός αριθμός διαιρείται από το 7. Αν το αποτέλεσμα είναι μεγάλος αριθμός και δεν μπορούμε να αποφανθούμε, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Παράδειγμα:

Θα ελέγξουμε τον 24633

2463 - 3·2 = 2457

245 - 7·2 = 231

23 - 1·2 = 21 Άρα ο 24633 διαιρείται από το 7. Έτσι 24633 = **7**·3519

- **Διαιρετότητα με 8**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **8**, αν τα τελευταία τρία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που είναι πολλαπλάσιος του 8 ή είναι 000.

Παράδειγμα: ο αριθμός 345088 διαιρείται με το 8 γιατί ο 088 είναι πολλαπλάσιος του 8. Επίσης ο παραπάνω αριθμός διαιρείται με το 8 γιατί διαιρείται με το 2 και με το 4 συγχρόνως. 345088 = **8**·43136

• **Διαιρετότητα με 9**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **9**, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9. Παράδειγμα: 7101=**9**·789

• **Διαιρετότητα με 10, 100, κ.λ.π.**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **10**, **100**, κ.λ.π., αν λήγει αντιστοίχως σε 1,2, κ.λ.π. τουλάχιστον μηδενικά.

• **Διαιρετότητα με 11**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **11**, αν διαδοχικά προσθέσουμε και αφαιρέσουμε εναλλάξ ένα-ένα τα ψηφία του, από αριστερά προς τα δεξιά, ή να σχηματίσουμε δύο ομάδες από τα ψηφία 1°, 3°, 5°, … και 2°, 4°, 6°, … να βρούμε τα αθροίσματα των δύο ομάδων και να αφαιρέσουμε τα αθροίσματα αυτά, να προκύψει αριθμός πολλαπλάσιος του 11.

Εξήγηση: αν ο αριθμός είναι $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τότε αυτός γράφεται $1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta=$

$(1001\alpha-\alpha)+(99\beta+\beta)+(11\gamma-\gamma)+\delta=\left(1001\alpha+99\beta+11\gamma\right)-\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta\right)=$

$\left(11\cdot 91\alpha+11\cdot 9\beta+11\gamma\right)-\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta\right)=11\left(91\alpha+9\beta+\gamma\right)-\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta\right)=$

$\text{πολ}.11-\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta\right)$ επομένως, για να είναι ο αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ πολλαπλάσιος του 11 θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιος του 11 και ο αριθμός $\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta\right)$.

Παραδείγματα:

- ο αριθμός 7194 διαιρείται με το 11 γιατί 7-1+9-4 = 11 = πολ.11
- 7524 = **11**·684 γιατί 7-5+2-4 = 0 = πολ.11
- 10979177 = **11**·998107 γιατί 1-0+9-7+9-1+7-7 = 11 = πολ.11 ή
  1+9+9+7=26 και 0+7+1+7=15 ενώ 26 – 15 = 11 = πολ.11
- 4<u>7</u>2<u>1</u>8<u>8</u>5<u>9</u> έχουμε τις δύο ομάδες ψηφίων: 1^{η} ομάδα 4+2+8+5=19,
  2^{η} ομάδα 7+1+8+9=25, επειδή 25 – 19 = 6 ≠ πολ.11 ο αρχικός αριθμός 47218859 δεν διαιρείται με το 11.

• **Διαιρετότητα με 25**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **25**, αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 25 ή 00. Παράδειγμα: 43075 = **25**·1723 ή 98500 = **25**·3940

► Αν ένας αριθμός διαιρείται από άλλους δυο, θα διαιρείται και από το γινόμενό τους. Παράδειγμα: ο αριθμός 520 διαιρείται με το 2 και με το 4 άρα διαιρείται και με το $2\cdot 4=8$.

Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ανάλυση ενός **σύνθετου** αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων λέμε την εργασία που κάνουμε ώστε να γράψουμε τον αριθμό σε ίσο γινόμενο παραγόντων πρώτων αριθμών.

Μέθοδος:

- Διαιρούμε τον αριθμό με το μικρότερο πρώτο διαιρέτη του.
- Το πηλίκο που προκύπτει, το διαιρούμε ξανά με το μικρότερο πρώτο διαιρέτη του και συνεχίζουμε όμοια μέχρι να βρούμε πηλίκο 1.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός αναλύεται κατά τρόπο μοναδικό.
- Οι **Μ.Κ.Δ.** και **Ε.Κ.Π.** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών βρίσκονται εύκολα, αν αναλύσουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

1. Το **Ε.Κ.Π.** βρίσκεται, **αν πάρουμε όλους τους εμφανιζόμενους παράγοντες, υψωμένους στη μεγαλύτερη δύναμη** και τους πολλαπλασιάσουμε.
2. Ο **Μ.Κ.Δ.** βρίσκεται, **αν πάρουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες, υψωμένους στη μικρότερη δύναμη** που εμφανίζεται ο καθένας και τους πολλαπλασιάσουμε.

Π.χ. είναι $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $160 = 2^5 \cdot 5$, οπότε:
Μ.Κ.Δ. $(144, 160) = 2^4 = 16$
Ε.Κ.Π. $(144, 160) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$$\begin{cases} 144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ 160 = 2^5 \cdot 5^1 \end{cases}$$

$$\text{ΜΚΔ}(144, 160) = 2^4 = 16$$

$$\text{ΕΚΠ}(144, 160) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 1440$$

Πώς βρίσκουμε πρώτους αριθμούς

Ένα πρόβλημα που έχει απασχολήσει εδώ και αιώνες είναι η εύρεση μιας απλής μεθόδου με την βοήθεια της οποίας να μπορεί κανείς να αποφασίζει αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή όχι. Μια διαδικασία δηλαδή που θα βρίσκει πρώτους αριθμούς. Πρώτος ο φιλόσοφος και μαθηματικός **Ερατοσθένης** ανακάλυψε ένα τρόπο που επιτρέπει να πάρει κανείς όλους τους πρώτους αριθμούς, ξεκινώντας από τον μικρότερο χωρίς να χάνει κανένα. Αυτή η μέθοδος έχει γίνει γνωστή σαν ***«κόσκινο του Ερατοσθένη»***.

Έτσι, με την μέθοδο του Ερατοσθένη γράφουμε όλους τους αριθμούς κι επειδή κάτι τέτοιο δεν είναι βέβαια δυνατόν, γράφουμε όσους αριθμούς βρίσκονται στην περιοχή που μας ενδιαφέρει κάθε φορά. Π.χ. τους αριθμούς από το 1 έως και το 50.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Στη συνέχεια αρχίζουμε να διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του 2, δηλαδή τους άρτιους αριθμούς 4, 6, 8, κ.λ.π. που ως γνωστόν είναι σύνθετοι αριθμοί. Μετά διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 3, μετά τα πολλαπλάσια του 5, μετά του 7 κ.λ.π. Με αυτόν τον τρόπο κοσκινίζοντας τους αριθμούς, παίρνουμε τελικά ένα κατάλογο με όλους τους πρώτους αριθμούς ξεκινώντας από τον μικρότερο, χωρίς να παραλείψουμε κανένα.

Αυτή η βασική αρχή χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα σε προγράμματα υπολογιστών. Με την βοήθεια τους βέβαια μπορεί κανείς να βρίσκει πολύ μεγαλύτερους πρώτους αριθμούς από εκείνους που ο Ερατοσθένης κατόρθωνε να βρίσκει. Όμως η μέθοδος βελτιώθηκε μόνο ως προς την ταχύτητα. Κατά τα άλλα η αρχή στην οποία στηρίζεται παραμένει η ίδια.

Πολλά χρόνια μετά ο Γάλλος μαθηματικός **Pierre de Fermat**, τον $17^{ο}$ αιώνα προσπάθησε να βρεί ένα γενικό τύπο που να δίνει πρώτους αριθμούς. Ένα αιώνα όμως αργότερα ο **Euler** απέδειξε ότι κάτι τέτοιο δεν ήταν αλήθεια.